

Equazioni alle derivate parziali e processi di diffusione

Andrea Odetti matricola 660134

9 febbraio 1998

Indice

1	Introduzione	2
2	Semigrupperi e operatori infinitesimali	3
2.1	Semigrupperi	3
2.2	Operatori infinitesimali	4
2.3	Esempi di equazioni differenziali	6
2.4	Operatore infinitesimale di un processo di diffusione	8
2.4.1	Forma del generatore infinitesimale	10
3	Equazioni differenziali stocastiche	11
4	Equazioni di Kolmogorov e di Fokker-Planck	12
4.1	Equazione retrospettiva	12
4.1.1	Equazione di Feynman-Kac	13
4.1.2	Equazione del calore	15
4.1.3	Equazione non omogenea	15
4.2	Equazione prospettica	16
4.2.1	Misura invariante	16
4.3	Una nota sui nomi	17
4.4	Martingale	18
5	Equazioni alle derivate parziali e curve caratteristiche	18
5.1	Equazioni del primo ordine	18
5.2	Equazioni del secondo ordine	19
5.2.1	Principio del massimo	21
5.2.2	Equazione del calore	21

1. Introduzione

Dato un sistema di n equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$$

è noto che la soluzione può essere espressa come $\varphi^t(\xi) = e^{tM}\xi$, dove ξ è un vettore di \mathbf{R}^n , ovvero un'applicazione da \mathbf{R}^n in se stesso che associa al dato iniziale ξ la posizione al tempo t .

È possibile, mantenendo le proprietà essenziali dell'equazione e dello spazio in cui è immersa, generalizzare il concetto per includere anche situazioni molto più generali come ad esempio il caso infinito-dimensionale delle equazioni alle derivate parziali.

Si può quindi riscrivere l'equazione nel modo seguente (che chiameremo del *primo tipo*):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = g \end{cases}$$

Le proprietà ritenute essenziali sono la *linearità* dell'operatore A , così come è lineare il prodotto matrice-vettore, e le caratteristiche di *spazio normato* di \mathbf{R}^n , per tale motivo l'insieme su cui opera A sarà uno spazio di Banach (spazio vettoriale normato completo).

Si possono quindi precisare gli elementi fondamentali che verranno trattati nel seguito

$$\begin{aligned} E & \text{ è uno spazio di Banach} \\ A & : E \supseteq D(A) \rightarrow E \\ u & : [0, +\infty) \rightarrow D(A) \\ g & \in D(A) \end{aligned}$$

dove $D(A)$ è il dominio di A . D'ora in poi la variabile t sarà sempre considerata come un tempo e quindi positiva.

La derivata di u rispetto a t è definita nel solito modo

$$\frac{d}{dt}u(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

dove però il limite è inteso secondo la norma in E .

Per soluzione del problema di cui sopra si intende una funzione u , definita su $[0, +\infty)$ a valori in $D(A)$, derivabile rispetto a t , che soddisfi l'equazione differenziale con dato iniziale.

La soluzione $u(t)$ può anche essere considerata come funzione del dato iniziale, ovvero un'applicazione da $[0, +\infty)$ in E , che associ ad ogni funzione g il valore al tempo t : $u(t)_g = S(t)[g]$.

Grazie a questa impostazione lo studio delle equazioni alle derivate parziali risulta essere legato profondamente alla teoria dei semigrupp (tra i quali rientra il caso semplice di $e^{tM}\xi$) e attraverso questi a particolari processi di diffusione.

Vi è un altro schema generale di equazione alle derivate parziali che è legato ai processi di diffusione e che quindi verrà trattato più avanti; il prototipo è dato dalla seguente espressione (d'ora in poi del *secondo tipo*):

$$\begin{cases} Au(x) = k(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

dove A è ancora un operatore (differenziale) lineare e D è un insieme aperto, connesso e limitato di \mathbf{R}^n . Il legame in questo caso è dovuto alla cosiddetta *formula di Dynkin*.

2. Semigrupp e operatori infinitesimali

È quindi necessario passare ad esaminare i semigrupp e i corrispondenti operatori infinitesimali.

2.1. Semigrupp

Operatori lineari Un operatore A definito su B (spazio vettoriale) a valori in E è *lineare* se per ogni $f, g \in B$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ si ha che

$$A[\alpha f + \beta g] = \alpha A[f] + \beta A[g]$$

Operatori limitati Un operatore lineare A definito su E a valori in E è *limitato* se esiste un numero reale M tale che

$$\|A[f]\| \leq M \|f\| \forall f \in E$$

In questo modo possiamo introdurre una *norma* sullo spazio degli operatori lineari limitati da E in E ponendo

$$\|A\| \doteq \inf M$$

oppure equivalentemente

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|A[f]\|$$

Semigrupp Una famiglia di operatori lineari limitati $(S(t))_{t \geq 0}$ definiti su E a valori in E forma un semigrupp se, per ogni f appartenente a E e $s, t \geq 0$ si ha:

- 1) $S(0)[f] = f$ (oppure $S(0) = I$, dove I è l'operatore identità)
- 2) $S(t+s)[f] = S(t)[S(s)[f]]$ (oppure $S(t+s) = S(t)S(s)$)

Se avviene che $\|S(t)\| \leq 1 \forall t \geq 0$ allora il semigrupp si dice *contraente*.

Il semigrupp si dice *fortemente continuo* se $S(t)[f] \rightarrow S(t_0)[f]$ (secondo la norma di E) per ogni f e per $t \rightarrow t_0$; affinché ciò si verifichi è sufficiente la continuità nell'origine.

Per comprendere il significato della precedente definizione si può pensare allo spazio E , come semplicemente a \mathbf{R} , nel qual caso il semigrupp $S(t)[x]$ ($x \in \mathbf{R}$) è senz'altro identificabile con $e^{t\alpha}x$ per un opportuno numero reale α . Si tratta quindi di una generalizzazione della funzione esponenziale a spazi più complessi.

2.2. Operatori infinitesimali

Ad ogni semigrupp viene associato un particolare operatore lineare, detto *operatore infinitesimale*, che caratterizza (sotto certe condizioni) in modo univoco lo stesso semigrupp.

Operatore infinitesimale Dato un semigrupp $S(t)$ su E l'operatore infinitesimale da esso generato è una funzione da $D(A)$ in E definita come

$$A[f] \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)[f] - f}{t} \quad (\text{secondo la norma di } E)$$

dove $D(A)$ è il sottoinsieme di E per il quale il limite esiste.

$A[f]$ può anche essere visto come la derivata destra (rispetto a t) nell'origine di $S(t)[f]$, ovvero $A[f] = \frac{d^+}{dt} S(0)[f]$. L'operatore così definito risulta essere lineare. È molto importante sottolineare che un generatore infinitesimale non può prescindere dal proprio dominio di definizione, in quanto ci sono esempi di semigruppi molto diversi tra loro, dotati di generatori che, pur avendo la stessa espressione, hanno domini differenti.

Per riprendere l'analogia con il caso reale, l'operatore infinitesimale di $S(t)[x] = e^{t\alpha}x$ non è altro che $A[x] = \alpha x$, ovvero la derivata calcolata nell'origine. Il semigrupp è infatti originato dall'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Il prossimo teorema è di fondamentale importanza per la risoluzione delle equazioni del primo tipo.

Teorema 1 Siano $S(t)$ un semigrupp fortemente continuo su E e A il suo operatore infinitesimale, allora:

- 1) $D(A)$ è un sottoinsieme denso di E
- 2) A è un operatore chiuso (ovvero $\{(f, A[f]) : f \in D(A)\}$ è un sottoinsieme chiuso di $E \times E$)
- 3) $f \in D(A) \Rightarrow S(t)[f] \in D(A) \forall t \geq 0$
- 4) se $S(t)$ è contraente allora $f \in D(A) \Rightarrow A[S(t)[f]] = S(t)[A[f]] = \frac{d^+}{dt} S(t)[f] \forall t \geq 0$
- 5) se g appartiene a $D(A)$ allora $u(t) = S(t)[g]$ è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = g \end{cases}$$

Il punto 4 del teorema prende anche il nome di *relazione generale* dei semigrupp.

Questo teorema afferma che un semigrupp fortemente continuo e contraente è la soluzione di un'equazione differenziale del primo tipo nella quale A è il suo operatore infinitesimale; si tratta quindi, dato un operatore infinitesimale, di trovare il semigrupp ad esso associato.

Il problema è facilmente risolto se A è limitato, in quanto la serie (che definisce una sorta di funzione *esponenziale* generalizzata)

$$e^{tA}[f] \doteq f + tA[f] + \frac{t^2}{2!}A[A[f]] + \dots$$

converge e la famiglia $(e^{tA})_{t \geq 0}$ costituisce un semigrupp avente come operatore infinitesimale proprio A ; conseguentemente la soluzione di un'equazione differenziale del primo tipo può essere espressa come $u(t) = e^{tA}[g]$, in un modo del tutto analogo al caso dei sistemi ordinari.

Se l'operatore A non è limitato è necessario imporre alcune condizioni per assicurare l'esistenza del corrispondente semigrupp. A tal fine si può ricordare il teorema di Hille-Yosida che risolve il problema per i semigrupp contraenti.

Teorema di Hille-Yosida Affinché l'operatore lineare A sia l'operatore infinitesimale di un semigrupp fortemente continuo e contraente è necessario e sufficiente che:

- 1) A sia chiuso e $D(A)$ sia denso in E
- 2) per ogni $\lambda > 0$ l'operatore $(\lambda I - A)$ sia invertibile in E
- 3) $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$

Può essere interessante notare che, se le ipotesi di questo teorema sono soddisfatte, allora l'operatore definito da $(\lambda I - A)^{-1}$ ha un'interessante rappresentazione in termini del semigruppato incognito $S(t)$

$$(\lambda I - A)^{-1} [f] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) [f] dt$$

ovvero ne è la sua trasformata di Laplace.

Grazie alle proprietà dei semigruppato è possibile determinare anche la soluzione di un'equazione lineare non omogenea

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + h(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

dove h è una funzione definita su $[0, +\infty)$ a valori in E .

Principio di Duhamel Se A è l'operatore infinitesimale di un semigruppato fortemente continuo e contraente $S(t)$ allora

$$u(t) = \int_0^t S(t-s) [h(s)] ds$$

(dove l'integrale di una funzione a valori in uno spazio di Banach è definito in maniera del tutto analoga a quello di Lebesgue), è la soluzione della precedente equazione non omogenea.

2.3. Esempi di equazioni differenziali

Per poter comprendere la vasta gamma di equazioni differenziali che rientrano nei modelli presentati nel primo capitolo, si possono portare alcuni esempi.

Sistemi ordinari lineari del primo ordine Dato un sistema lineare del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \\ x(0) = e \\ y(0) = f \end{cases}$$

è possibile riconoscere in esso un'equazione del primo tipo ponendo $u(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$,

$A[u] = Mu$ (dove $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$) e $g = \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$; si prende \mathbf{R}^2 come spazio di Banach.

Equazioni differenziali paraboliche Nello schema generale può rientrare anche un'ampia gamma di equazioni alle derivate parziali, tra le quali si può ricordare l'*equazione del calore* per una sbarra di lunghezza infinita

$$\begin{cases} u_t'(t, x) = \Delta u(t, x) \\ u(0, x) = h(x) \end{cases}$$

In questo caso basta prendere $E = C(\mathbf{R}^n)$, $A[u] = \Delta u \left(\doteq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)$, $D(A) = C^2(\mathbf{R}^n)$ e $g = h$.

Equazione delle onde Con un semplice artificio è possibile ritrovare nell'equazione delle onde in \mathbf{R}^n

$$\begin{cases} u_{tt}''(t, x) = \Delta u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t'(0, x) = h(x) \end{cases}$$

un'equazione del primo tipo; il procedimento è simile a quello utilizzato per ricondurre un'equazione differenziale di ordine n in un sistema di n equazioni del primo ordine.

Infatti l'equazione iniziale può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{cases} v_t^{(1)'}(t, x) = v^{(2)}(t, x) \\ v_t^{(2)'}(t, x) = \Delta v^{(1)}(t, x) \\ v^{(1)}(0, x) = f(x) \\ v^{(2)}(t, x) = h(x) \end{cases}$$

oppure in forma più compatta ponendo $A[f] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{vmatrix}$ e $g = \begin{vmatrix} f \\ h \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} v_t' = Av \\ v(0) = g \end{cases}$$

dove il dominio dell'operatore è l'insieme delle funzioni continue da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^2 .

Equazioni differenziali ellittiche Tra le equazioni del secondo tipo merita essere ricordata quella di *Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = h(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

la cui soluzione è detta *armonica*. Questa equazione è importante perché permette di determinare la temperatura d'equilibrio di un corpo.

2.4. Operatore infinitesimale di un processo di diffusione

La risoluzione di alcune equazioni alle derivate parziali può essere ricondotta allo studio di particolari processi stocastici, nel senso che la soluzione dell'equazione differenziale non è altro che il valore atteso di un funzionale della traiettoria del processo in questione. I processi stocastici che entrano in gioco sono, in prima approssimazione, catene di Markov a tempo continuo con spazio degli stati \mathbf{R}^n .

Catena di Markov Dato uno spazio di Kolmogorov (Ω, \mathcal{F}, P) , si chiama *catena di Markov* (omogenea rispetto al tempo) una famiglia di variabili aleatorie $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ a valori in \mathbf{R}^n , per le quali sia verificata l'uguaglianza, quasi certamente rispetto a P , per ogni evento D appartenente a $\sigma(X_s : s \geq t)$

$$P[D | \sigma(X_s : s \leq t)]_{(\omega)} = P[D | \sigma(X_t)]_{(\omega)}$$

Ad ogni catena di Markov è associata una misura di probabilità di transizione definita da

$$P(x, t, F) \doteq P[X_t \in F | X_0 = x]$$

che soddisfa, tra le altre, la seguente proprietà detta anche *equazione di Chapman-Kolmogorov*:

$$P(x, t + s, F) = \int_{\mathbf{R}^n} P(x, t, dy) P(y, s, F)$$

per ogni t e $s \geq 0$ e $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

Grazie a questa proprietà, se consideriamo lo spazio di Banach delle funzioni a valori reali definite su \mathbf{R}^n , misurabili e limitate, che indicheremo con $B(\mathbf{R}^n)$, la famiglia di operatori

$$U(t)[f]_{(x)} \doteq \int_{\mathbf{R}^n} f(y) P(x, t, dy) = E[f(X_t) | X_0 = x]$$

costituisce un *semigrupp*o (proprio grazie all'equazione di Chapman-Kolmogorov) *contraente* (infatti la speranza matematica è una media interna) e non negativo (poiché P è positiva). Per poter applicare la teoria dei semigrupp è però necessario che $U(t)$ sia fortemente continuo sullo spazio di definizione; la scelta di $B(\mathbf{R}^n)$ non è adeguata per questo scopo, occorre perciò restringere il campo delle funzioni. Indicheremo con $B_0(\mathbf{R}^n)$ il sottoinsieme di $B(\mathbf{R}^n)$ formato dalle funzioni per le quali

$$U(t)[f] \rightarrow f \text{ per } t \rightarrow 0^+$$

lo spazio B_0 risulta essere uno spazio di Banach, un sottospazio lineare di B e, inoltre, è invariante rispetto alle trasformazioni $U(t)$. Ciò ci permette di considerare il semigruppo $U(t)$ semplicemente definito su B_0 ove risulta *fortemente*

continuo; spesso B_0 conterrà come sottoinsieme lo spazio delle funzioni limitate e continue.

$U(t)$ risulta essere un *semigruppato di Feller*, ovvero un semigruppato fortemente continuo, contraente e definito sullo spazio delle funzioni limitate e continue.

Sarà ovviamente possibile definire un operatore infinitesimale del semigruppato $U(t)$, che in questo caso prende anche il nome di *generatore infinitesimale* del processo stocastico

$$A[f]_{(x)} \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E^x(f(X_t)) - f(x)}{t}$$

A questo punto il semigruppato $U(t)$, come d'altronde ogni altro semigruppato fortemente continuo e contraente, soddisfa le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt} U(t)[f] = A[U(t)[f]] = U(t)[A[f]]$$

per ogni f in $D(A)$.

Per poter riconoscere in questa espressione un'equazione alle derivate parziali occorre prendere in considerazione un processo di diffusione (una particolare catena di Markov).

Processo di diffusione Una catena di Markov omogenea rispetto al tempo $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ con traiettorie quasi certamente continue è detta *processo di diffusione*, se la sua misura di probabilità di transizione $P(x, t, A)$ soddisfa le seguenti condizioni per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ e $\varepsilon > 0$:

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} P(x, t, \{z : |z - x| > \varepsilon\}) = 0$
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_{\{z : |z - x| \leq \varepsilon\}} (y - x) P(x, t, dy) = \mu(x)$
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_{\{z : |z - x| \leq \varepsilon\}} (y - x)(y - x)^T P(x, t, dy) = \sigma(x)$

In questo caso μ è detto vettore $(n \times 1)$ di deriva e σ matrice $(n \times n)$ di diffusione; in particolare σ , una sorta di matrice di varianza e covarianza infinitesimale, è semidefinita positiva.

Per i processi di diffusione la determinazione del generatore infinitesimale è risolta dal seguente teorema:

Teorema 2 *Se indichiamo con A il generatore infinitesimale di un processo di diffusione con coefficienti μ e σ , allora:*

- 1) $D(A)$ contiene l'insieme delle funzioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{R} continue, limitate e con derivate prime e seconde continue e limitate

2) se f è una funzione del punto 1 allora:

$$A[f]_{(x)} = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) f'_{x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j}(x) f''_{x_i x_j}(x)$$

Per la particolare forma del dominio del generatore infinitesimale di un processo di diffusione (funzioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}) non si potranno studiare sistemi di equazioni alle derivate parziali, come ad esempio l'equazione delle onde, perché coinvolgono funzioni a valori vettoriali.

2.4.1. Forma del generatore infinitesimale

Abbiamo visto che il generatore infinitesimale di un processo di diffusione è un operatore *differenziale* del secondo ordine *ellittico*; possiamo provare a dare una giustificazione di questo fatto in base alle proprietà del processo.

Per quanto riguarda il carattere differenziale, si può osservare che, essendo le traiettorie continue, il valore del generatore nel punto x ($A[f]_{(x)}$) deve dipendere esclusivamente dai valori che la funzione f assume in un intorno di x piccolo a piacere: si dice allora che A è un operatore *locale*. Per concludere basta ricordare che esiste un teorema secondo il quale un operatore è locale se e solo se è differenziale.

Per i generatori infinitesimali di una diffusione vale la seguente importantissima:

Proposizione 1 *Se una funzione f , appartenente a $D(A)$, ha un massimo assoluto nel punto x , allora $A[f]_{(x)} \leq 0$.*

Infatti, essendo E una media interna, si ha che $A[f]_{(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E^x(f(X_t)) - f(x)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x)}{t} = 0$.

Questa proposizione ha due conseguenze sulla forma dell'operatore:

1) è *ellittico* (eventualmente degenere) perché la matrice dei coefficienti dei termini di secondo ordine deve essere semidefinita positiva (la matrice hessiana di una funzione regolare in un punto di massimo è semidefinita negativa)

2) non può contenere termini di ordine superiore al secondo poiché si possono mostrare funzioni che in un punto di massimo hanno tali derivate di segno qualunque.

Infine l'impossibilità di contenere il termine $c(x) f(x)$ discende dalla seguente:

Proposizione 2 $A[1]_{(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E^{x(1)} - 1}{t} = 0.$

Come immediata conseguenza si ha che $c(x) \equiv 0.$

Modificando le caratteristiche del processo di diffusione (ad esempio introducendo un *tempo di estinzione*) si possono trovare generatori in cui $c(x)$ è minore di zero.

3. Equazioni differenziali stocastiche

Per cogliere più a fondo il collegamento tra le equazioni alle derivate parziali e i processi di diffusione è fondamentale analizzare le proprietà della soluzione della seguente equazione differenziale stocastica (che per semplicità assumiamo unidimensionale):

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Esistono due modi di intendere la precedente equazione, legati alle differenti interpretazioni date al termine $b(X_t) dB_t$ (ovvero all'integrale stocastico $\int_0^t b(X_s) dB_s$) ai quali accenneremo brevemente.

Integrale di Itô Secondo la strada seguita da Itô la soluzione dell'equazione stocastica è un processo di diffusione con deriva a e diffusione b^2 , il cui generatore infinitesimale è

$$A[f]_{(x)} = a(x) f'_x(x) + \frac{1}{2} b^2(x) f''_{xx}(x)$$

Integrale di Stratonovich Seguendo l'interpretazione di Stratonovich si giunge invece ad un processo di diffusione con lo stesso coefficiente di diffusione ottenuto da Itô, ma con una diversa deriva, ora infatti essa è $a + \frac{1}{2} b'_x b$. In questo caso il generatore infinitesimale è

$$\tilde{A}[f]_{(x)} = \left(a(x) + \frac{1}{2} b'_x(x) b(x) \right) f'_x(x) + \frac{1}{2} b^2(x) f''_{xx}(x)$$

Per la risoluzione delle equazioni di Itô occorre tener presente che, per il differenziale di una funzione composta, vale la seguente formula (detta *formula di Itô*):

$$dg(X_t) = \left(a(X_t) g'_x(X_t) + \frac{1}{2} b^2(X_t) g''_{xx}(X_t) \right) dt + b(X_t) g'_x(X_t) dB_t$$

mentre nel caso di Stratonovich continua a rimanere valido lo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine.

Nel seguito si farà *sempre* riferimento all'interpretazione di Itô, tenendo conto che si può passare in ogni momento a quella di Stratonovich utilizzando \tilde{A} al posto di A .

4. Equazioni di Kolmogorov e di Fokker-Planck

Nel caso di $U(t)$, data la natura differenziale del corrispondente operatore infinitesimale, è possibile esprimere la doppia relazione generale dei semigruppì in forma di equazione alle derivate parziali del secondo ordine.

Per tutto questo capitolo X_t sarà il processo di diffusione soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dB_t$$

in cui a e b soddisfano le condizioni per l'esistenza e l'unicità di tale soluzione, e g una funzione continua, limitata, con derivate seconde continue e limitate, appartenente perciò a $D(A)$.

4.1. Equazione retrospettiva

Come visto in precedenza, per il semigruppò $U(t)$ vale la relazione $\frac{d}{dt}U(t)[g] = A[U(t)[g]]$; quindi la funzione $u(t, x) \doteq U(t)[g]_{(x)} = E^x(g(X_t))$ soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$u'_t(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j}(x) u''_{x_i x_j}(t, x)$$

con la condizione iniziale che da $U(0)[g] = g$ diviene $u(0, x) = g(x)$.

Viceversa per risolvere l'equazione del secondo ordine

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j}(x) u''_{x_i x_j}(t, x) \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

basta calcolare il valore atteso $E^x(g(X_t))$ dove X_t è un processo di diffusione con deriva a e diffusione σ . È quindi necessario (e sufficiente) trovare una matrice b tale che $bb^T = \sigma$, operazione possibile solo se σ è simmetrica e semidefinita positiva.

Nel caso particolare di un processo unidimensionale e di $g(x) = \mathcal{I}_{(-\infty, y]}(x)$ si ha che $E^x(g(X_t)) = P^x(X_t \leq y)$; se inoltre questa funzione di ripartizione

ammette densità $p(x, t, y)$, l'equazione differenziale, che in tal caso prende il nome di *equazione retrospettiva* di Kolmogorov, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} p'_t(x, t, y) = a(x)p'_x(x, t, y) + \frac{1}{2}b^2(x)p''_{xx}(x, t, y) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} p(x, t, y) = \delta(x - y) \end{cases}$$

4.1.1. Equazione di Feynman-Kac

Esiste una generalizzazione dell'equazione retrospettiva che può essere ricondotta, mediante il riconoscimento a secondo membro di un generatore infinitesimale, allo studio di un processo di diffusione opportuno

$$u'_t(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j}(x) u''_{x_i x_j}(t, x) - c(x) u(t, x)$$

Se si potesse trovare un particolare processo di diffusione Y_t con operatore infinitesimale, dato proprio dal secondo membro della precedente equazione, allora, esattamente come prima, sotto opportune condizioni per i coefficienti, la soluzione $u(t, x)$ non sarebbe altro che il valore atteso di $g(Y_t)$, dove g è il solito dato iniziale.

Se la funzione $c(x)$ è non negativa allora la risposta è affermativa e il processo in questione è un particolare processo di diffusione *con tempo di estinzione*.

Processo di diffusione con tempo di estinzione Se X_t è un normale processo di diffusione e ξ è un (particolare) numero aleatorio positivo, allora Y_t , qui sotto definito, è un processo di diffusione con tempo di estinzione

$$Y_t(\omega) \doteq \begin{cases} X_t(\omega) & t < \xi(\omega) \\ \Delta & t \geq \xi(\omega) \end{cases}$$

dove Δ è un valore che indica che il processo è indefinito.

Per poter calcolare il generatore infinitesimale del processo Y_t è necessario che la sua misura di transizione $H(x, t, F)$ soddisfi la seguente condizione per ogni $x \in \mathbf{R}^n$:

$$4) \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} H(x, t, \{\Delta\}) \equiv \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (1 - H(x, t, \mathbf{R}^n)) = c(x)$$

H risulterà essere una misura di probabilità su $\mathbf{R}^n \cup \{\Delta\}$, mentre su \mathbf{R}^n è semplicemente una misura finita; si può quindi capire la richiesta di non negatività del coefficiente $c(x)$, esso è infatti limite di una funzione non negativa ($\frac{H}{t}$).

In questo caso si può mostrare che il generatore infinitesimale di Y_t , che indicheremo con B , non è altro che

$$\begin{cases} D(B) = D(A) \\ B[f](x) = A[f](x) - c(x) f(x) \end{cases}$$

La soluzione della nuova equazione alle derivate parziali è, come ci si potrebbe aspettare, $E^x(g(Y_t))$, dove $g(\Delta) = 0$.

Per mostrare come costruire un tempo di estinzione con coefficiente $c(x)$ (tale che $\int_0^\infty c(X_s) ds = \infty$ q.c.) prendiamo in considerazione un numero aleatorio Q , stocasticamente indipendente da X_t , distribuito secondo una legge esponenziale negativa di parametro 1. Il numero aleatorio ξ definito (q.c.) come soluzione di

$$\int_0^\xi c(X_s(\omega)) ds = Q(\omega)$$

risulta essere un tempo di estinzione con coefficiente $c(x)$.

Avendo fatto tale scelta è immediato constatare che la condizione $t < \xi(\omega)$ è equivalente a $\int_0^t c(X_s(\omega)) ds < Q(\omega)$; questo fatto ci permette di calcolare il valore atteso di $g(Y_t)$, ottenendone tra l'altro una differente e interessante espressione

$$\begin{aligned} E^x(g(Y_t)) &= E^x(g(X_t) \mathcal{I}_{[0, \xi]}(t)) \\ &= \int_{\mathbf{R}^{[0, \infty)} \times \mathbf{R}_+} g(y(t)) \mathcal{I}_{(\int_0^t c(y(s)) ds, \infty)}(q) P_X^x(dy) e^{-q} dq \\ &= \int_{\mathbf{R}^{[0, \infty)}} g(y(t)) \left(\int_{\int_0^t c(y(s)) ds}^\infty e^{-q} dq \right) P_X^x(dy) \\ &= \int_{\mathbf{R}^{[0, \infty)}} g(y(t)) e^{-\int_0^t c(y(s)) ds} P_X^x(dy) \\ &= E^x \left(g(X_t) e^{-\int_0^t c(X_s) ds} \right) \end{aligned}$$

grazie alla quale possiamo effettuare il calcolo senza dover preventivamente determinare il valore di ξ .

Riprendendo l'analisi fatta nel paragrafo 2.4.1 si può notare che per il processo Y_t la tesi della proposizione 1 continua ad essere valida ma solo in corrispondenza di un massimo assoluto *positivo*. Anche la proposizione 2 deve essere modificata:

$B[1]_{(x)} \leq 0$. Per questo motivo il generatore infinitesimale può contenere anche il termine di ordine zero (con un coefficiente negativo).

La motivazione comune è che $E^x(f(Y_t))$ non è più una media interna e consistente (infatti dopo il tempo di estinzione $f(Y_t)$ vale 0), ma avvicina i valori allo zero.

4.1.2. Equazione del calore

Può essere interessante applicare il procedimento sin qui seguito per risolvere l'equazione del calore per una sbarra di lunghezza infinita

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x) \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

L'equazione differenziale stocastica associata all'operatore $A[f]_{(x)} = f''_{xx}(x)$ è

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2}dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

che risolta dà $X_t = \sqrt{2}B_t + x_0$, ovvero una combinazione lineare del moto browniano unidimensionale, di cui si conosce la densità di probabilità di transizione

$$p(x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{1}{4t}(y-x)^2}$$

Si può quindi scrivere la soluzione in forma esplicita

$$u(t, x) = E\left(g\left(\sqrt{2}B_t + x\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} g(y) e^{-\frac{1}{4t}(y-x)^2} dy$$

dove la speranza matematica è presa rispetto alla distribuzione del moto browniano standard.

4.1.3. Equazione non omogenea

In virtù del principio di Duhamel la funzione u definita da

$$u(t, x) = E^x\left(\int_0^t h(s, X_{t-s}) ds\right)$$

è la soluzione della seguente equazione non omogenea:

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j}(x) u''_{x_i x_j}(t, x) + h(t, x) \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

Per risolvere poi un'equazione in cui il dato iniziale non è identicamente nullo basta ricordare il *principio di sovrapposizione* e sommare alla soluzione appena trovata la funzione $E^x(g(X_t))$, soluzione di

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = Av \\ v(0) = g \end{cases}$$

4.2. Equazione prospettica

È nota un'altra equazione, molto simile a quella retrospettiva, che prende in considerazione la densità di probabilità (ammesso che esista) delle realizzazioni di un processo di diffusione (che per semplicità considereremo a valori in \mathbf{R}). Dalla seconda parte della relazione generale dei semigruppì si ha che, per ogni funzione f in $D(A)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} f(y) p(x, t, y) dy = \int_{\mathbf{R}} A[f]_{(y)} p(x, t, y) dy$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} f(y) p(x, t, y) dy = \int_{\mathbf{R}} \left(a(y) f'_y(y) + \frac{1}{2} b^2(y) f''_{yy}(y) \right) p(x, t, y) dy$$

dove a e b sono i coefficienti di deriva e diffusione del processo (che supporremo derivabili a piacere).

Dalla precedente uguaglianza si può agevolmente ricavare che la densità $p(x, t, y)$ deve soddisfare la seguente equazione alle derivate parziali, che prende il nome di *equazione prospettica* di Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b^2(y) p(x, t, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (a(y) p(x, t, y)) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} p(x, t, y) = \delta(x - y) \end{cases}$$

4.2.1. Misura invariante

Con un'equazione differenziale molto simile a quella prospettica è possibile determinare la misura invariante di un processo di diffusione, ammesso che quest'ultima esista e sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Ricordiamo che Φ è una *misura invariante*, per la catena di Markov con funzione di transizione P , se soddisfa l'equazione

$$\Phi(F) = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(dx) P(x, t, F)$$

per ogni $t \geq 0$ e F in $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$; oppure, nel caso sia dotata di densità

$$\varphi(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) p(x, t, y) dx$$

Se la misura invariante è anche una misura di probabilità allora essa è detta *distribuzione stazionaria* della catena.

Nel caso di un processo di diffusione scalare con coefficienti a e b^2 , se una densità invariante esiste, essa è soluzione non negativa e non nulla dell'equazione differenziale

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b^2(y) \varphi(y)) - \frac{\partial}{\partial y} (a(y) \varphi(y)) = 0$$

Per mostrare come si giunge a questo risultato supponiamo che, se $\varphi(y)$ esiste vale $\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t, y) = \varphi(y)$ e che le funzioni siano abbastanza regolari in modo da poter invertire limite, integrale e derivata. Dall'equazione di Chapman-Kolmogorov si ha che

$$\varphi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t + s, y) = \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t, z) p(z, s, y) dz = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(z) p(z, s, y) dz$$

e quindi φ risulta essere una densità invariante; passando al limite nell'equazione prospettica otteniamo che

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b^2(y) \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (a(y) \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t, y))$$

da cui l'equazione già trovata.

Può essere interessante osservare che, nel caso in cui il coefficiente di diffusione non si annulli mai, se la quantità

$$K = \int_{\mathbf{R}} b^{-2}(x) e^{2 \int_0^x b^{-2}(z) a(z) dz} dx$$

è finita, allora il processo possiede distribuzione stazionaria la cui densità rispetto alla misura di Lebesgue è

$$\varphi(y) = K^{-1} \int_{-\infty}^y b^{-2}(x) e^{2 \int_0^x b^{-2}(z) a(z) dz} dx$$

4.3. Una nota sui nomi

I nomi di equazione *retrospettiva* e *prospettica* si riferiscono al fatto che nella prima la densità è derivata rispetto alla variabile che identifica la posizione del processo all'istante iniziale ($p(\mathbf{x}, t, y)$), mentre nella seconda rispetto a quella relativa alla posizione finale ($p(x, t, \mathbf{y})$).

4.4. Martingale

In questo paragrafo accenneremo brevemente ad un teorema che permette di costruire delle martingale utilizzando il generatore infinitesimale di un processo di diffusione.

Teorema 3 *Se $v(t, x)$ e $v'_t(t, x)$ sono funzioni appartenenti a $D(A)$ per ogni t allora il processo*

$$Z(t) = v(t, X_t) - \int_0^t \left(v'_t(s, X_s) + A[v(s)]_{(X_s)} \right) ds$$

è una martingala rispetto a $\sigma(X_s : s \leq t)_{t \geq 0}$.

Da questo teorema risulta immediatamente che se $v'_t(t, x) + A[v(t)]_{(x)} \equiv 0$ allora $v(t, X_t)$ è una martingala.

5. Equazioni alle derivate parziali e curve caratteristiche

Per risolvere alcune equazioni alle derivate parziali si utilizza il metodo delle *curve caratteristiche*, che consiste nella ricerca di alcune curve lungo le quali l'equazione risulta essere ordinaria: per trovare il valore della soluzione in un punto di \mathbf{R}^n , basta quindi integrare l'equazione lungo la curva caratteristica che passa per quel punto (così che diventi ordinaria) e utilizzare il dato iniziale.

5.1. Equazioni del primo ordine

Per esemplificare il procedimento prendiamo in esame un'equazione alle derivate parziali semi-lineare del primo ordine in due variabili

$$\begin{cases} a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y, u) \\ \Gamma \in \text{grafico di } u(x, y) \end{cases}$$

dove Γ è una curva di \mathbf{R}^3 parametrizzata con $(f(s), g(s), h(s))$; la soluzione cercata è una funzione u che soddisfi l'equazione e contenga Γ .

Andiamo quindi a risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dx(t, s)}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy(t, s)}{dt} = b(x, y) \\ x(0, s) = f(s) \\ y(0, s) = g(s) \end{cases}$$

dove ad ogni \bar{s} corrisponde una *curva caratteristica* $(x(t, \bar{s}), y(t, \bar{s}))$ passante per il punto di coordinate $(f(\bar{s}), g(\bar{s}))$.

Osserviamo che lungo le caratteristiche la derivata totale di u rispetto a t è $\frac{d}{dt}u(x(t, s), y(t, s)) = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y$ e perciò l'equazione alle derivate parziali può essere riscritta come

$$\begin{cases} \frac{dz(t, s)}{dt} = c(x, y, z) \\ z(0, s) = h(s) \end{cases}$$

dopo di che abbiamo in forma parametrica la soluzione del problema, ovvero la superficie di \mathbf{R}^3

$$(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

Se è inoltre possibile ricavare t e s da x e y , la superficie risulta essere cartesiana e la soluzione può essere espressa come

$$u(x, y) = z(t^{-1}(x, y), s^{-1}(x, y))$$

Affinché la soluzione sia univocamente determinata, almeno in un intorno di Γ_{xy} , è necessario che la curva di \mathbf{R}^2 $(f(s), g(s))$ (ovvero la proiezione di Γ sul piano xy), non sia caratteristica: se così non fosse si potrebbe avere infatti la non esistenza della soluzione oppure al contrario la sua indeterminatezza. A tal fine utilizzando il teorema di Dini deve avvenire che

$$\det \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix} \neq 0$$

per $t = 0$ in vista di una soluzione locale.

5.2. Equazioni del secondo ordine

Prendiamo ora in esame un'equazione del secondo ordine ellittica

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j}(x) u''_{x_i x_j}(x) = k(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

in cui D è un insieme aperto, connesso e limitato di \mathbf{R}^n e σ una matrice simmetrica.

Si può provare a seguire una strada simile a quella del precedente paragrafo, guidati dal fatto che l'espressione a secondo membro è il generatore infinitesimale di un processo di diffusione; ciò ci suggerisce di utilizzare come *curve caratteristiche* le traiettorie soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

nella quale la matrice b è stata scelta in modo tale che $bb^T = \sigma$ (operazione senz'altro possibile visto il carattere ellittico dell'equazione). Dal momento che σ è definita positiva occorre prendere in considerazione un moto browniano n -dimensionale, ovvero anche b deve essere quadrata e non singolare.

Per semplicità assumiamo che il processo sia scalare e che D sia un sottoinsieme di \mathbf{R} ; così facendo l'equazione diviene ordinaria, ma il procedimento può essere applicato senza modificazioni sostanziali anche al caso multidimensionale.

Grazie alla formula di Itô possiamo calcolare il differenziale stocastico (in forma integrale) di una funzione u , che soddisfi l'equazione differenziale, lungo le traiettorie del processo X_t

$$u(X_t) - u(X_0) = \int_0^t \left(a(X_s) u'_x(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s) u''_{xx}(X_s) \right) ds + \int_0^t b(X_s) u'_x(X_s) dB_s$$

Se al tempo t sostituiamo il tempo d'arresto $\tau_D(\omega) \doteq \inf \{t > 0 : X_t(\omega) \notin D\}$ e utilizziamo l'equazione differenziale per inserire le quantità k e g otteniamo

$$u(x) = g(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} k(X_s) ds - \int_0^{\tau_D} b(X_s) u'_x(X_s) dB_s$$

se a questo punto prendiamo i valori attesi (rispetto a P^x) di entrambi i membri ed essendo $E^x \left(\int_0^{\tau_D} b(X_s) u'_x(X_s) dB_s \right) = 0$ (in virtù delle isometrie di Itô) possiamo scrivere la soluzione

$$u(x) = E^x \left(g(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} k(X_s) ds \right)$$

che non è altro che il valore atteso di una funzione delle traiettorie del processo.

È opportuno a questo punto analizzare due fatti importanti:

1) il procedimento seguito si basa sull'assunzione che $E^x(\tau_D)$ sia finita, ovvero sul fatto che le traiettorie, ovunque esse abbiano inizio, escano sicuramente dall'insieme D ; si può dimostrare che il carattere (uniformemente) ellittico dell'equazione e, conseguentemente, della matrice di diffusione del processo, è una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi

2) la soluzione u , all'interno del dominio, dipende dal dato sul bordo esclusivamente per i valori che esso assume in corrispondenza dei punti di (possibile) uscita delle traiettorie da D (detti perciò *regolari*), mentre è del tutto indipendente dagli altri valori. Questo significa che, per avere una soluzione univocamente determinata, è sufficiente assegnare le condizioni iniziali per i punti regolari della frontiera di D .

Una formulazione più generale dello stesso ragionamento è rappresentata dalla cosiddetta *formula di Dynkin*, grazie alla quale è anche possibile ricavare il teorema 2, di cui si è trattato precedentemente.

Teorema di Dynkin Se X_t è un processo di diffusione e τ un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(X_s; s \leq t)$, tale che $E^x(\tau) < \infty$, allora

$$E^x(f(X_\tau)) = f(x) + E^x\left(\int_0^\tau A[f]_{(X_s)} ds\right)$$

5.2.1. Principio del massimo

Un risultato molto noto della teoria delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine è il cosiddetto *principio del massimo*.

Principio del massimo debole Se D è un sottoinsieme aperto, connesso e limitato di \mathbf{R}^n , A un operatore uniformemente ellittico in \bar{D} e u una funzione reale appartenente a $C^2(\bar{D})$ tale che $Au = 0$ in D (u è detta anche A -armonica) allora

$$\max_{y \in \partial D} u(y) \geq u(x) \geq \min_{y \in \partial D} u(y)$$

per ogni $x \in \bar{D}$.

Il significato di tale teorema è che una funzione A -armonica non può avere un estremo assoluto forte in un punto interno.

È possibile dare una giustificazione *probabilistica* di questo enunciato: abbiamo già mostrato che esiste una rappresentazione di u in termini dei valori che assume sulla frontiera di D

$$u(x) = E^x(g(X_{\tau_D}))$$

Il principio del massimo segue dal fatto che la speranza matematica è una media interna

$$\max_{y \in \partial D} u(y) \geq \sup_{\omega \in \Omega} g(X_{\tau_D}^\omega) \geq E^x(g(X_{\tau_D})) \geq \inf_{\omega \in \Omega} g(X_{\tau_D}^\omega) \geq \min_{y \in \partial D} u(y)$$

Ci si potrebbe ovviamente limitare a considerare i punti regolari della frontiera, come verrà fatto nel prossimo paragrafo.

5.2.2. Equazione del calore

A questo punto possiamo analizzare l'equazione del calore per una sbarra di lunghezza finita

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x) \\ u(0, x) = q(x) \\ u(t, a) = h(t) \\ u(t, b) = r(t) \\ t \in (0, T), x \in (a, b) \end{cases}$$

e riconoscere in essa un'equazione del secondo tipo.

Se portiamo u'_t a secondo membro otteniamo l'operatore $A[f]_{(t,x)} = -f'_t(t,x) + f''_{xx}(t,x)$ cui è associato un processo con vettore di deriva $\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e matrice di diffusione $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (visto il carattere parabolico del problema si può scegliere il vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ come coefficiente per l'equazione differenziale stocastica).

Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{cases} dX_t^1 = -dt \\ dX_t^2 = \sqrt{2}dB_t \\ X_0^1 = t_0 \\ X_0^2 = x_0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $X_t = (-t + t_0, \sqrt{2}B_t + x_0)$, grafico in \mathbf{R}^2 di una combinazione lineare del moto browniano unidimensionale con asse dei tempi invertito. Il dominio è semplicemente $D = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : t \in (0,T), x \in (a,b)\}$, $k(x) = 0$ e il dato sul bordo è $g = (q, h, r)$.

Nonostante l'operatore non sia ellittico ma parabolico, l'equazione possiede soluzione che può essere rappresentata nel solito modo

$$u(x) = E^x \left(g(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} k(X_s) ds \right)$$

che in questo caso, osservando che $\tau_D^{t,x} \leq t$, non è altro che

$$u(t,x) = E \left(g \left(t - \tau_D, \sqrt{2}B_{\tau_D} + x \right) \right)$$

Si può quindi capire perché è sufficiente (ma anche necessario) fornire la temperatura della sbarra all'istante iniziale ($u(0,x) = q(x)$), mentre non è possibile determinare l'evoluzione della stessa conoscendone il valore finale. I punti della frontiera superiore di D non sono regolari, il processo X_t infatti, partendo dall'interno di D , non può uscire attraversandoli in quanto si dirige sempre verso il basso (la prima componente ha deriva -1 e diffusione 0). Si può affermare in altri termini che la temperatura ad un certo istante dipende solo dal passato e non da come si evolverà nel futuro.

Il problema della determinazione della temperatura minima e massima della sbarra può essere risolto mediante il principio del massimo; anche in questo caso sebbene le ipotesi del teorema non siano completamente soddisfatte la tesi resta

comunque valida. La temperatura raggiunge il suo massimo (o il minimo) in un punto di frontiera di D , ovvero all'istante iniziale o finale oppure a uno dei capi della sbarra; è interessante notare però che non bisogna considerare l'istante finale, in quanto, riprendendo l'analisi già fatta

$$\sup_{\omega \in} g(X_{\tau_D}^x) = \sup_{\text{punti regolari di } \partial D} u(y)$$

perché $X_{\tau_D}^x$ mai verrà a trovarsi sul bordo superiore di D (l'istante finale).

Riferimenti bibliografici

- [1] Karlin S. & Taylor H. M.: *A second course in stochastic processes*, Academic Press, 1981
- [2] McOwen R.: *Partial differential equations*, Prentice Hall, 1996
- [3] Øksendal B. K.: *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag, 1945
- [4] Salsa A. & Pagani C. D.: *Analisi matematica 2*, Masson, 1991
- [5] Taira K.: *Diffusion processes and partial differential equations*, Academic Press, 1988