

Evaluation d'options avec incertitude sur la volatilité

Andrea Odetti, Rémy Ripoll

5 octobre 2000

Table des matières

1	Introduction	1
2	La formule de Black et Scholes	2
3	Incertitude sur la volatilité	2
3.1	Modèles utilisés	3
3.1.1	Hypothèses	3
3.1.2	Stratégie de couverture	4
3.2	Mauvaise spécification du modèle	4
3.2.1	Convexité et bid/ask	6
4	Hedging	7
4.1	Méthode naive	7
4.2	Hedge du portefeuille	8
4.2.1	Transformation de l'EDP	8
4.2.2	Discrétisation de l'EDP	9
4.2.3	Comparaison des méthodes de hedging	10
4.2.4	Analyse graphique	12
4.3	Le cas d'un call avec barrière	13
4.3.1	Analyse graphique	16

1 Introduction

On constate sur le marché un resserrement du spread bid ask des produits dérivés dont la convexité n'est pas constante (exemple : call spread). Faire le prix de tels produits, en considérant que la convexité est additive aboutit à des incohérences sur le marché. L'objectif de cet article est donc d'apporter une méthode de pricing et de couverture d'un portefeuille de produits dérivés de façon à tenir compte de la convexité globale. On rappellera le lien entre convexité et couverture d'un produit dérivé dans la présentation.

Cette étude se place dans le cadre suivant : on considère que la volatilité est inconnue, mais déterministe et qu'elle est comprise entre deux bornes, données par le marché. Afin de faire le lien entre la couverture et la convexité d'un produit dérivé.

Dans cette présentation les résultats théoriques seront illustrés par des exemples sur des stratégies call spread et butterfly, ainsi que sur des options à barrières.

2 La formule de Black et Scholes

On rappelle ici brièvement les hypothèses du modèle d'évaluation des options de Black et Scholes. Le modèle fait des hypothèses sur la volatilité du sous-jacent, notamment cette volatilité est constante et connue avec certitude

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 &= s \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses le prix d'une option européenne est donné par l'espérance mathématique suivante

$$C(s, k, T) = E [e^{-rT} (S_T - k)^+ \mid S_0 = s]$$

pour laquelle il existe une solution explicite

$$\begin{aligned} C(s, k, T) &= sN(d_1) - ke^{-rT}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{s}{k} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{s}{k} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

On sait en plus qu'il est possible de couvrir cette option avec une stratégie en delta en temps continu

$$\Delta(t) = N(d_1)$$

3 Incertitude sur la volatilité

Ces hypothèses sont assez fortes, ici on suppose par contre la volatilité déterministe, mais pas connue avec certitude : elle peut se balader entre deux bornes σ^+ et σ^- pour toute la durée de vie de l'option.

3.1 Modèles utilisés

Avant d'analyser le cas où la volatilité peut être limitée entre deux bornes, on étudie le comportement du modèle de Black et Scholes lorsqu'on fait des hypothèses fausses sur la volatilité.

Vrai modèle La dynamique du sous-jacent est réglée par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ S_0 &= s\end{aligned}$$

Modèle utilisé Le modèle utilisé pour le pricing et le hedging est

$$\begin{aligned}dS_t^\gamma &= rS_t^\gamma dt + \gamma(t, S_t^\gamma) S_t^\gamma dW_t \\ S_0^\gamma &= s\end{aligned}$$

où la seule différence est la volatilité $\gamma(t, S_t^\gamma)$ au lieu de σ_t .

On veut calculer le prix d'une option dont le payoff est $h(\bullet)$

- la vraie valeur de cette option est $p^\sigma(s) = E[e^{-rT} h(S_T) \mid S_0 = s]$
- la valeur calculée avec le faux modèle est $p^\gamma(s) = E[e^{-rT} h(S_T^\gamma) \mid S_0^\gamma = s]$

3.1.1 Hypothèses

On fait sur h l'hypothèse de convexité suivante

- $h(\bullet)$ est une fonction convexe sur $(0, +\infty)$ avec des dérivées gauches et droites bornées

$$h'(x\pm) \leq C$$

On remarque tout de suite que cette hypothèse est satisfaite par le payoff d'un *call* ou d'un *put*

- $h(x) = (x - k)^+$
- $h(x) = (k - x)^+$

mais ce n'est pas le cas d'un *call spread*

$$\begin{aligned}CS(k_1, k_2) &= Call(k_1) - Call(k_2) \\ k_1 &< k_2\end{aligned}$$

ou d'un *butterfly*

$$\begin{aligned}B(k_1, k_2) &= Call(k_1) - 2Call\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) + Call(k_2) \\ k_1 &< k_2\end{aligned}$$

3.1.2 Stratégie de couverture

Le but de celui qui a vendu (ou acheté) l'option est de se couvrir avec un portefeuille ($\Pi_{\Delta}(t)$) autofinçant, qui promet à la date T exactement la valeur du payoff, pour toute évolution du prix du sous-jacent.

Dans le portefeuille il y a deux composantes

- $\Delta(t)$ actions (le sous-jacent)
- le reste est investi à un taux fixe connu r

Le portefeuille suit une dynamique de diffusion[NEKS98]

$$\begin{aligned}d\Pi_{\Delta}(t) &= r[\Pi_{\Delta}(t) - \Delta(t) S_t] dt + \Delta(t) dS_t \\ \Pi_{\Delta}(0) &= p\end{aligned}$$

On peut aisément justifier cette dynamique

- $\Pi_{\Delta}(t) - \Delta(t) S_t$ est la somme investie au taux r , qui suit une dynamique déterministe

$$\begin{aligned}dx &= rxdt \\ x(t) &= x(0) e^{rt}\end{aligned}$$

- $\Delta(t)$ est le nombre d'actions dans le portefeuille qui évoluent selon la dynamique du sous-jacent

Theorème 1 *On sait (et c'est le résultat principal de Black et Scholes) que si on choisit*

$$\Delta(t) = \frac{\partial}{\partial s} p_t^{\sigma}(s)$$

alors

$$\Pi_{\Delta}(T) = h(S_T)$$

C'est à dire, la stratégie en delta couvre l'option.

3.2 Mauvaise spécification du modèle

La question la plus intéressante est : *qu'est-ce qui se passe si on couvre l'option avec la stratégie*

$$\Delta^{\gamma}(t) = \frac{\partial}{\partial s} p_t^{\gamma}(s)$$

où p_t^{γ} est le prix calculé avec une volatilité γ ?

Le portefeuille de couverture $\Pi_{\Delta\gamma}(t)$ évolue selon

$$\begin{aligned} d\Pi_{\Delta\gamma}(t) &= r[\Pi_{\Delta\gamma}(t) - \Delta^\gamma(t) S_t] dt + \Delta^\gamma(t) dS_t \\ &= r\Pi_{\Delta\gamma}(t) dt + \Delta^\gamma(t) [dS_t - rS_t dt] \\ &= r\Pi_{\Delta\gamma}(t) dt + \sigma_t S_t \Delta^\gamma(t) dW_t \end{aligned}$$

où on utilise σ_t parce qu'il s'agit de la *vraie dynamique* du portefeuille.

Le faux prix de l'option $p_t^\gamma(S_t)$ est solution de l'EDP de Black et Scholes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_t^\gamma(s) + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(s) r s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(s) \gamma^2(t, s) s^2 &= r p_t^\gamma(s) \\ p_T^\gamma(s) &= h(s) \end{aligned}$$

où il faut remarquer qu'on a utilisé la volatilité $\gamma(t, s)$. Ce prix suit une EDS

$$\begin{aligned} dp_t^\gamma(S_t) &= \frac{\partial}{\partial t} p_t^\gamma(S_t) dt + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \langle dS, dS \rangle_t \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} p_t^\gamma(S_t) + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t S_t dW_t \\ &= \left[r p_t^\gamma(S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t^2 S_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \gamma^2(t, S_t) S_t^2 \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t S_t dW_t \end{aligned}$$

où, encore une fois, la volatilité du sous-jacent est σ_t .

L'erreur commise $e_t = \Pi_{\Delta\gamma}(t) - p_t^\gamma(S_t)$ suit la dynamique

$$\begin{aligned} de_t &= d\Pi_{\Delta\gamma}(t) - dp_t^\gamma(S_t) \\ &= r[e_t + p_t^\gamma(S_t)] dt + \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t S_t dW_t - dp_t^\gamma(S_t) \\ &= \left[r e_t dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \sigma_t^2 S_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) \gamma^2(t, S_t) S_t^2 \right] dt \\ &= r e_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2(t, S_t) - \sigma_t^2] dt \\ e_0 &= 0 \end{aligned}$$

Comme la valeur initiale est nulle, si le terme $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2(t, S_t) - \sigma_t^2]$ est toujours positif, alors l'erreur croit et $\Pi_{\Delta\gamma}(t) \geq p_t^\gamma(S_t)$, on a donc une *superstratégie*.

Il y a 2 termes, le premier $\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t)$ représente la convexité du prix de l'option, *ce n'est pas la convexité du payoff*, mais il existe un théorème qui, sous certaines hypothèses permet de considérer le payoff au lieu du prix.

Theorème 2 Si la fonction de volatilité est assez régulière et que le taux d'intérêt est déterministe, alors un payoff convexe entraîne une fonction de prix convexe.

Pour un call ou un put on a donc $\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(s) \geq 0$.

Il ne nous reste qu'analyser le choix de la fonction de volatilité utilisée pour le pricing et le hedging.

Theorème 3 Si $\sigma_t \leq \gamma(t, S_t)$ sur $[0, T]$ alors

$$\Pi_{\Delta\gamma}(T) \geq h(S_T)$$

Si $\sigma_t \geq \gamma(t, S_t)$ sur $[0, T]$ alors

$$\Pi_{\Delta\gamma}(T) \leq h(S_T)$$

Dans ce théorème on avait fait l'hypothèse de convexité du payoff, on pourrait *relaxer* cette hypothèse

Corollaire 4 Pour un payoff quelconque $h(\bullet)$, si

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(s) [\gamma^2(t, s) - \sigma_t^2] \geq 0$$

sur $[0, T] \times \mathbf{R}_+$, alors

$$\Pi_{\Delta\gamma}(T) \geq h(S_T)$$

Ce résultat affirme que si pour le calcul de la stratégie de couverture, on choisit une fonction de volatilité qui est *plus grande* que la vraie volatilité là où le payoff est *convexe*, et qui est *plus petite* où le payoff est *concave*, on a

$$\Pi_{\Delta\gamma}(T) \geq h(S_T)$$

3.2.1 Convexité et bid/ask

On a dit que avec un payoff *convexe*, si on utilise une volatilité *plus grande* que la volatilité du sous-jacent, on obtient une *surstratégie* : c'est le cas de la *vente* d'une option. La P&L finale est

$$P\&L = \Pi_{\Delta\gamma}(T) - h(S_T)$$

et on veut bien que ce soit *positif*.

Donc pour calculer le prix de *vente* on considère le payoff $h(\bullet)$, pour le prix d'*achat*, il faut par contre considérer $-h(\bullet)$.

Pour un call standard, comme le payoff est convexe, pour l'*achat* il faut que $\sigma_t \leq \gamma(t, S_t)$, pour la *vente* $\sigma_t \geq \gamma(t, S_t)$.

4 Hedging

Afin de couvrir un produit dérivé, les traders achètent ou vendent le sous-jacent du produit dérivé de façon à être insensible à des variations de marché, on dit que le portefeuille est delta hedgé. La sensibilité du delta est mesurée par la convexité du portefeuille, c'est à dire le gamma. Plus le gamma est important plus le portefeuille nécessite d'être re-hedgé, ou en d'autre terme, plus l'erreur de couverture est importante. Afin de réduire l'erreur de couverture et donc le prix du produit dérivé, il faut réduire le gamma du portefeuille en diversifiant la convexité. La couverture d'un tel portefeuille peut être optimisée en considérant une gestion globale de la convexité plutôt qu'une gestion additive. Afin d'illustrer cette proposition on étudiera les deux méthodes de gestion sur un portefeuille constitué d'une option *butterfly*.

Avec le dernier corollaire on peut analyser le cas de la volatilité déterministe, inconnue, mais limitée entre deux bornes

$$\begin{aligned}\sigma^+ &\geq \sigma_t \geq \sigma^- \\ \forall t &\in [0, T]\end{aligned}$$

On étudie le comportement d'un trader qui se propose d'acheter ou vendre (indifféremment) une option *butterfly* avec strikes k_1 et k_2

$$B(k_1, k_2) = Call(k_1) - 2Call\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) + Call(k_2)$$

Le but de ce trader est de minimiser l'écart entre le prix de vente et le prix d'achat du *butterfly* tout en garantissant la couverture.

On rappelle le résultat principal de la section précédente pour le cas des calls standards, avec les bornes pour la volatilité

- prix d'*achat* calculé avec σ^-
- prix de *vente* avec σ^+

4.1 Méthode naïve

Dans cette première méthode on couvre une option à la fois.

Prix d'achat Acheter le butterfly signifie acheter les options avec strike k_1 et k_2 et vendre celle dont le strike est $\frac{k_1 + k_2}{2}$. En utilisant les résultats précédents on choisit la volatilité σ^- pour les options *achetées* et σ^+ pour celle qu'on doit *vendre*

$$B^{achat}(k_1, k_2) = Call(k_1, \sigma^-) - 2Call\left(\frac{k_1 + k_2}{2}, \sigma^+\right) + Call(k_2, \sigma^-)$$

Prix de vente De même pour le prix de vente : σ^- pour les options *achetées* et σ^+ pour celle qu'on doit *vendre* :

$$B^{vente}(k_1, k_2) = Call(k_1, \sigma^+) - 2Call\left(\frac{k_1 + k_2}{2}, \sigma^-\right) + Call(k_2, \sigma^+)$$

On pourrait expliquer cette stratégie d'une façon naïve : on choisit un prix *cher* pour les options qu'on *vend*, et un prix *faible* lorsqu'on *achète*.

4.2 Hedge du portefeuille

On pourrait par contre considerer le butterfly comme un seul produit et essayer de le hedger d'une façon unique : le payoff du butterfly est

$$h(s) = (s - k_1)^+ - \left(s - \frac{k_1 + k_2}{2}\right)^+ + (s - k_2)^+$$

qui n'est ni convexe ni concave. On ne peut pas savoir à priori quelle est la volatilité qu'il faut utiliser : on ne peut pas la choisir selon la convexité de $h(\bullet)$, on doit résoudre l'EDP d'évaluation[AL99]

$$\begin{aligned} r p_t(s) &= \frac{\partial}{\partial t} p_t(s) + \frac{\partial}{\partial s} p_t(s) r s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(s) \gamma^2(t, s) s^2 \\ \gamma(t, s) &= \begin{cases} \sigma^+ & \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(s) \geq 0 \\ \sigma^- & \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(s) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

avec la condition finale $p_T(s) = h(s)$ pour le prix de *vente* et $p_T(s) = -h(s)$ pour le prix d'*achat*.

4.2.1 Transformation de l'EDP

Pour résoudre l'EDP d'évaluation avec incertitude sur la volatilité, on a utilisé un ϑ -schéma *implicite*[Sul] sur une simple transformation du modèle. Comme l'équation n'est pas uniformément elliptique, on introduit la nouvelle variable

$$\begin{aligned} x &= \ln s \\ u(t, x) &= p_t(e^x) \\ p_t(s) &= u(t, \ln s) \end{aligned}$$

avec laquelle l'EDP devient

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \ln s) + \frac{\partial}{\partial s} u(t, \ln s) \left[r - \frac{1}{2} \gamma^2(t, s) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, \ln s) \gamma^2(t, s) = r u(t, \ln s) \quad s > 0$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \left[r - \frac{1}{2} \gamma^2(t, e^x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \gamma^2(t, e^x) &= ru(t, x) \\ x &\in \mathbf{R} \\ u(T, x) &= h(e^x) \end{aligned}$$

et la condition sur la convexité de $p_t(\bullet)$ devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(s) &= -\frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} u(t, \ln s) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, \ln s) \\ &= \frac{1}{s^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, \ln s) - \frac{\partial}{\partial s} u(t, \ln s) \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(e^x) &= \frac{1}{e^{2x}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \\ \gamma'(t, x) &= \begin{cases} \sigma^+ & \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \geq 0 \\ \sigma^- & \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La nouvelle EDP est *elliptique*, cela nous permet d'utiliser des schémas plus stables et qui convergent plus rapidement.

4.2.2 Discrétisation de l'EDP

Pour la discrétisation de l'EDP on a choisi le pas en temps h et en espace Δ

$$\frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} + Au(t, x) - ru(t, x) = 0$$

où l'opérateur A vaut

$$\begin{aligned} Au(t, x) &= \frac{u(t, x + \Delta) - u(t, x - \Delta)}{2\Delta} \left[r - \frac{1}{2} \gamma^2(t, x) \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{u(t, x + \Delta) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta)}{\Delta^2} \gamma^2(t, x) \end{aligned}$$

On a choisi une *approximation centrée* de la dérivée première parce que l'équation est uniformément elliptique (le coefficient $\gamma^2(t, x)$ est toujours positif).

Comme la variable x peut se balader dans tout \mathbf{R} il faut borner le domaine $[g, d]$ et choisir des conditions aux frontières g et d

$$\begin{aligned} u(t, g) &= 0 \\ u(t, d) &= h(e^g) \end{aligned}$$

les valeurs g et d étant tellement loin de la monnaie qu'il n'y a plus d'optionnalité.

Il s'agit donc de résoudre un système linéaire $Bx = C$ où le vecteur des inconnues est

$$x = \begin{pmatrix} u(t, x_0) \\ u(t, x_i) \\ u(t, x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

La matrice B est *tridiagonale* et vaut

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ a & b & c & & \\ & & a & b & c \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\gamma^2}{\Delta} - r + \frac{\gamma^2}{2} \right] \\ b &= 1 + rh + \frac{\gamma^2 h}{\Delta^2} \\ c &= -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\gamma^2}{\Delta} + r - \frac{\gamma^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Le vecteur C vaut

$$x = \begin{pmatrix} u(t+h, x_0) \\ u(t+h, x_i) \\ u(t+h, x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

On obtient le prix de l'option (c'est à dire la valeur $u(0, \ln S_0)$) avec la rétro-propagation du vecteur $(u(T, x_i))_{i=0..N_x}$ de T jusqu'à 0 en résolvant à chaque pas le système linéaire. Ce système, étant *tridiagonal*, peut être résolu avec des méthodes numériques très efficaces[nri].

4.2.3 Comparaison des méthodes de hedging

On veut analyser le hedging du portefeuille dans le cas où on calcule le prix avec la méthode globale et les deltas de couverture avec la méthode naive. On suppose qu'il n'y a pas de taux d'intérêt ($r = 0$), et qu'on veut couvrir la vente d'un *call spread*.

Le delta de couverture est basé sur les deltas des deux calls qui composent le call spread

$$\Delta(t) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(S_t, k_1, \sigma^+) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t(S_t, k_2, \sigma^-)$$

La valeur initiale du portefeuille est par contre donnée par $p_t^\gamma(S_t, k_1, k_2)$ solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_t^\gamma(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(s) \gamma^2(t, s) s^2 &= 0 \\ (s - k_1)^+ - (s - k_2)^+ &= p_T^\gamma(s) \end{aligned}$$

Le portefeuille de couverture évolue selon l'EDS

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \sigma_t S_t \Delta(t) dW_t \\ \Pi_0 &= p_0^\gamma(S_0, k_1, k_2) \end{aligned}$$

On sait que la stratégie de couverture $\Delta(t)$ permet de *surcouvrir* le call spread en partant de la valeur initiale $p_0(S_0, k_1, \sigma^+) - p_0(S_0, k_2, \sigma^-)$, mais on sait que

$$p_0^\gamma(S_0, k_1, k_2) \leq p_0(S_0, k_1, \sigma^+) - p_0(S_0, k_2, \sigma^-)$$

Le problème est : *est-ce qu'on arrive à couvrir quand même le produit ?*

L'analyse de la tracking error $e_t = \Pi_t - p_t^\gamma(S_t, k_1, k_2)$ nous donne

$$\begin{aligned} de_t &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2 - \sigma_t^2] dt + \sigma_t S_t \left[\Delta(t) - \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \right] dW_t \\ e_0 &= 0 \end{aligned}$$

Comme pour le cas précédent, il y a le terme $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2 - \sigma_t^2] dt$ et on sait qu'il est toujours positif; il y a par contre un nouveau terme

$$\sigma_t S_t \left[\Delta(t) - \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \right] dW_t$$

qui ne serait pas là si on avait choisi une couverture correcte (c'est à dire hedging et pricing basés sur la même méthode).

La solution de l'EDS est

$$e_T = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2}{\partial s^2} p_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2 - \sigma_t^2] dt + \int_0^T \sigma_t S_t \left[\Delta(t) - \frac{\partial}{\partial s} p_t^\gamma(S_t) \right] dW_t$$

dont a priori on ne connaît pas le signe.

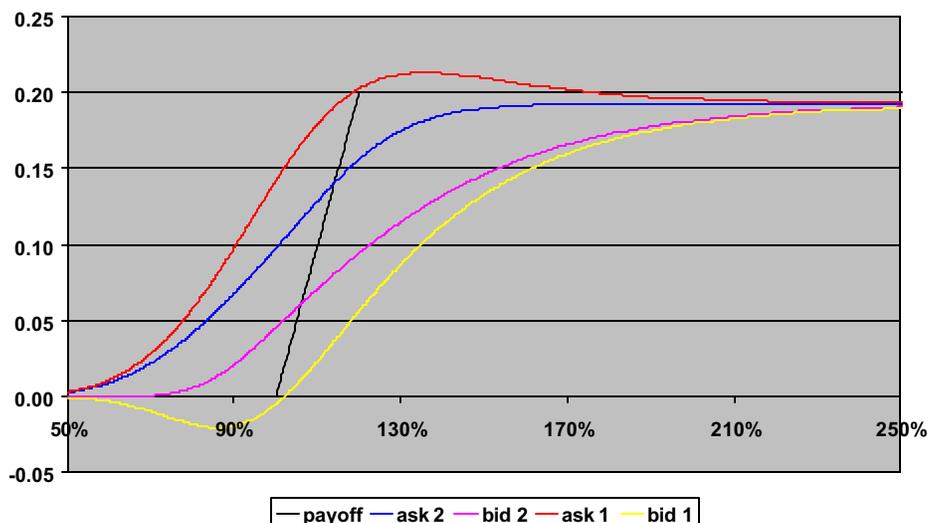


FIG. 1: Call spread : bid/ask

4.2.4 Analyse graphique

Sur chaque graphique est représenté le payoff de l'option ainsi que son spread bid ask dans le cas où la convexité est gérée de façon additive (cas 1) et dans le cas où la convexité est gérée de façon globale (cas 2).

Call spread On considère le call spread 100/120 maturité 1 an avec les bornes de volatilité 15%/35% (fig. 1). Dans le cas additif on constate que le spread bid ask est grand et que les prix sont incohérents. En effet pour un niveau de spot compris entre 120 et 150 le prix est *supérieur au niveau de gain maximal* attendu, personne ne sera acheteur. En revanche pour un spot inférieur à 100 le prix est *négligé*, personne ne sera vendeur. Dans le cas d'une gestion globale de la convexité on constate un resserrement du spread bid ask et les prix sont cohérents.

Butterfly Les mêmes remarques peuvent être faites dans le cas d'une stratégie butterfly 90/100/110 (fig. 2)

On considère maintenant l'évolution marked to market du portefeuille (fig. 3-4) ainsi que l'évolution de la couverture, la fréquence de reheding est de 10 par journée. Le graphique met en évidence que la stratégie de couverture naive donne un prix supérieur et surcouvre le portefeuille : c'est une stratégie de surcouverture (elle arrive à surcouvrir grâce au *prix de vente très élevé*). En revanche utilisant la stratégie de couverture globale

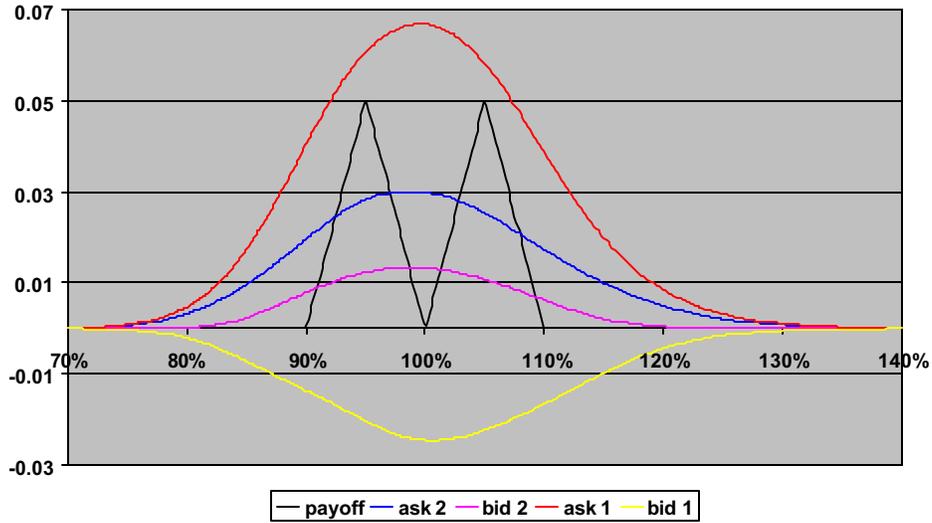


FIG. 2: Butterfly : Bid/Ask

on constate qu'on couvre en permanence le portefeuille sans pour autant le surcouvrir.

Les trois stratégies sont (fig. 3-4)

1. méthode globale à partir du prix global : *surcouverture*
2. méthode naive à partir du prix global : la valeur initiale du portefeuille est *trop faible* pour assurer une couverture
3. méthode naive à partir du prix naive : la surcouverture est assurée grâce au prix initial *double* que le prix globale

4.3 Le cas d'un call avec barrière

On peut essayer d'utiliser la même méthode pour le cas d'un *call* avec *barrière up&out*, dont le vrai prix

$$z_t(s) = E \left[e^{-r(T-t)} (S_T - k)^+ \mathcal{I}_{[\tau_t > T]} \mid S_t = s \right]$$

$$\tau_t = \inf \{u \geq t : S_u \geq \beta\}$$

satisfait l'EDP

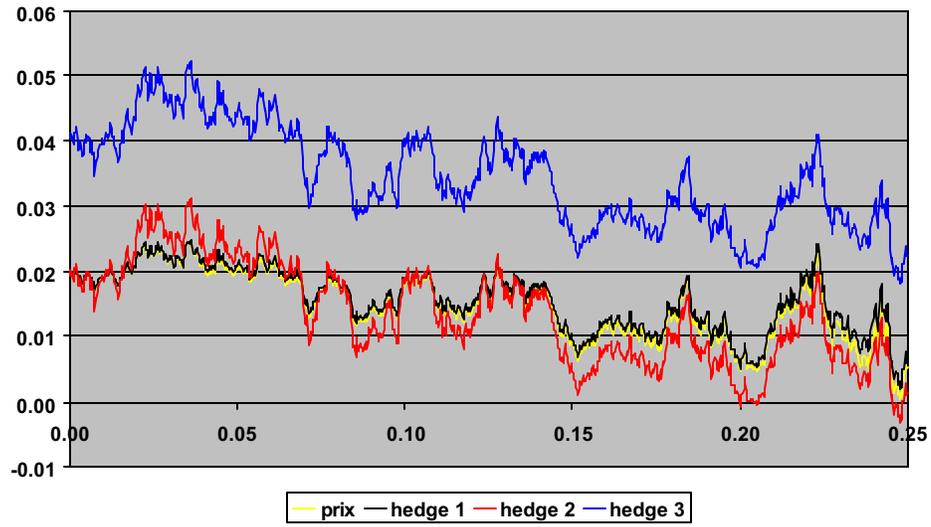


FIG. 3: Hedging

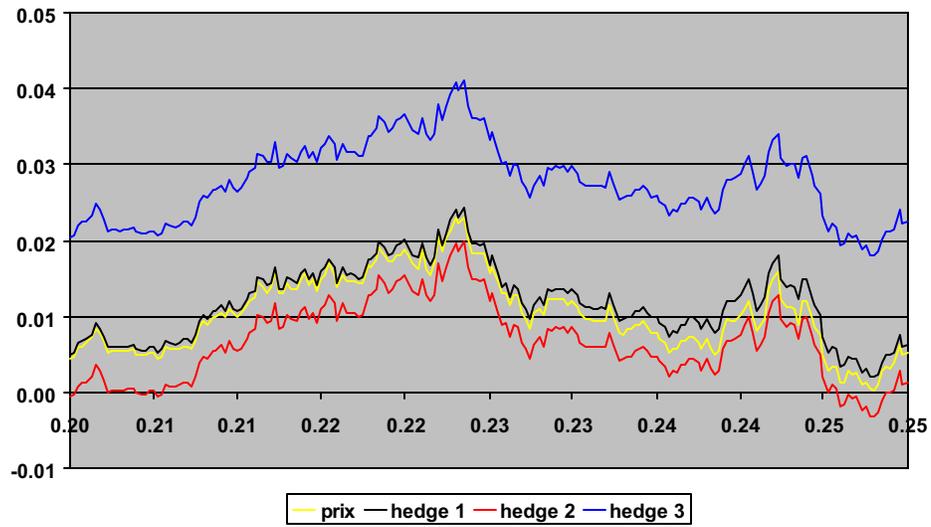


FIG. 4: Hedging : détail

$$\begin{aligned}
rz_t(s) &= \frac{\partial}{\partial t} z_t(s) + \frac{\partial}{\partial s} z_t(s) rs + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t(s) \sigma_t^2 s^2 \\
s &\in [0, \beta], t \in [0, T] \\
z_T(s) &= (s - k)^+ \\
z_t(\beta) &= 0
\end{aligned}$$

Comme d'habitude, on n'a pas accès à la *vraie volatilité* pour le pricing, main on dispose uniquement des bornes supérieure et inférieure; on choisit donc une volatilité en fonction de la convexité du prix

$$\gamma(t, s) = \begin{cases} \sigma^+ & \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(s) \geq 0 \\ \sigma^- & \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(s) < 0 \end{cases}$$

La stratégie de couverture est basée sur le delta du prix avec barriere

$$\Delta(t) = \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t)$$

Cette strategie n'est pas continue parce que le prix n'est pas dérivable à la barrière, mais on essaye quand même de continuer l'analyse. Il faut souligner aussi que le hedging s'arrête si le sous-jacent dépasse la barrière, et depuis on utilise une stratégie delta-nulle

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= 0 \forall t \geq \tau_0 \\
\Pi_T &= \Pi_{\tau_0} e^{r(T-\tau_0)}
\end{aligned}$$

La dynamique de z_t^γ est

$$\begin{aligned}
dz_t^\gamma(S_t) &\approx \frac{\partial}{\partial t} z_t^\gamma(S_t) dt + \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) \langle dS, dS \rangle_t \\
&\approx \left[\frac{\partial}{\partial t} z_t^\gamma(S_t) + \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t) r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t) \sigma_t S_t dW_t \\
&\approx \left(r z_t^\gamma(S_t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) \gamma^2(t, S_t) S_t^2 \right) \mathcal{I}_{[S_t < \beta]} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) \sigma_t^2 S_t^2 \Big] dt \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t) \sigma_t S_t dW_t
\end{aligned}$$

mais on peut enlever l'indicatrice $\mathcal{I}_{[S_t < \beta]}$ parce que si $S_t \geq \beta$ la fonction de prix est nulle et donc

$$z_t^\gamma(S_t) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) = 0$$

La tracking error est donc la même que pour le cas sans barrière

$$\begin{aligned} de_t &\approx re_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} z_t^\gamma(S_t) S_t^2 [\gamma^2(t, S_t) - \sigma_t^2] dt \geq 0 \\ e_0 &= 0 \end{aligned}$$

Avec les simplifications faites, on peut conclure que même pour une barrière, la stratégie de pricing et de hedging basée sur une volatilité qui change avec la convexité du payoff, permet de couvrir la vente ou l'achat d'une option.

Si on couvrait le call barrière avec la stratégie en delta d'un call standard ($\Delta(t)$), dans la dynamique de la tracking error il faudrait rajouter le terme

$$\sigma_t S_t \left[\Delta(t) - \frac{\partial}{\partial s} z_t^\gamma(S_t) \right] dW_t$$

qui, près de la barrière n'est pas négligeable.

4.3.1 Analyse graphique

On considère le *up&out* call barrière à 130. On observe bien un changement de convexité à l'approche de la barrière. Il est certain que le trader qui vend l'option est soumis à un risque de gamma important. En effet lorsque le sous-jacent est proche de la barrière, le trader doit vendre le sous-jacent pour se couvrir (et le gamma est important) et le racheter si la barrière est atteinte. Il est donc soumis à un risque de mouvement de marché à la hausse.

On peut voir (fig. 5) que les prix d'achat et de vente avec barrière sont très proches des prix standard pour une faible valeur du sous-jacent, près de la barrière par contre on remarque un changement de convexité.

On considère maintenant le hedging d'un call *up&out* dans les deux cas suivants

- barrière touchée (1)
- barrière non touchée (2)

lorsque la dynamique du sous-jacent est la même (fig. 6). On veut comparer une stratégie basée sur le delta de l'option *avec barrière* et une stratégie basée sur le delta de l'option *standard*.

Dans le premier cas le payoff final de l'option est nul (fig. 7), la stratégie avec barrière termine avec une surcouverture ; la stratégie classique par contre surcouvre beaucoup en terminant avec une P&L importante.

Ce n'est pas le cas lorsque le sous-jacent se rapproche de la barrière sans jamais la dépasser (fig. 8) :

- la stratégie avec barrière est toujours une très bonne couverture
- la stratégie classique termine avec une P&L négative.

On voit que les problèmes commencent lorsqu'on se rapproche de la barrière sans la dépasser, là où les deux deltas sont très différents.

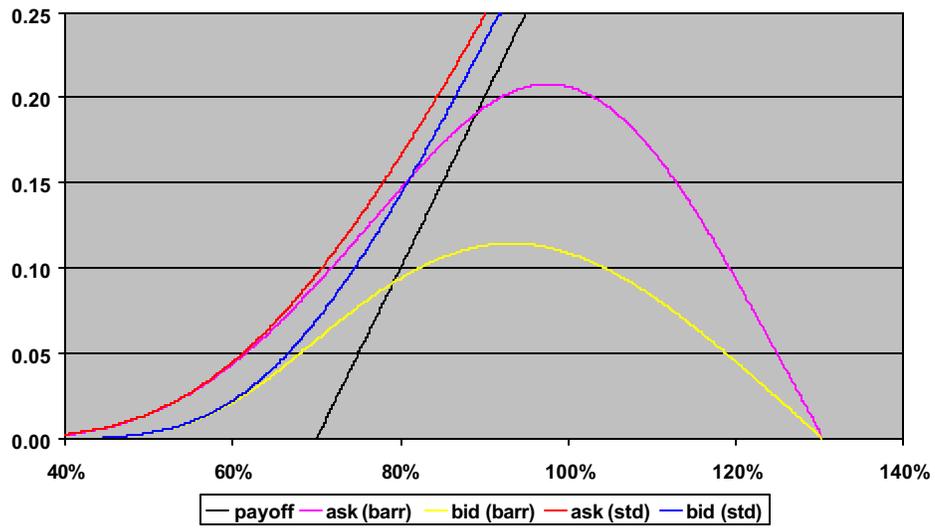


FIG. 5: Call *up&out* : Bid/Ask

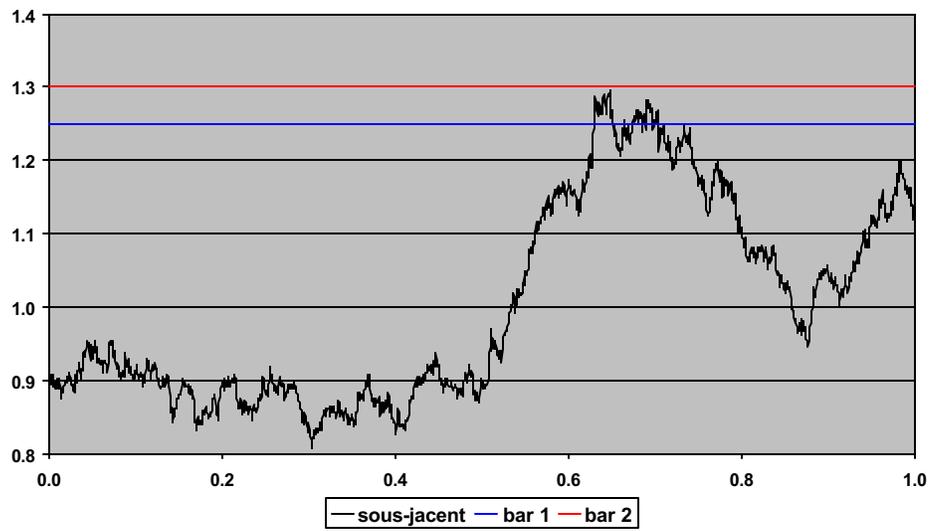


FIG. 6: Dynamique du sous-jacent

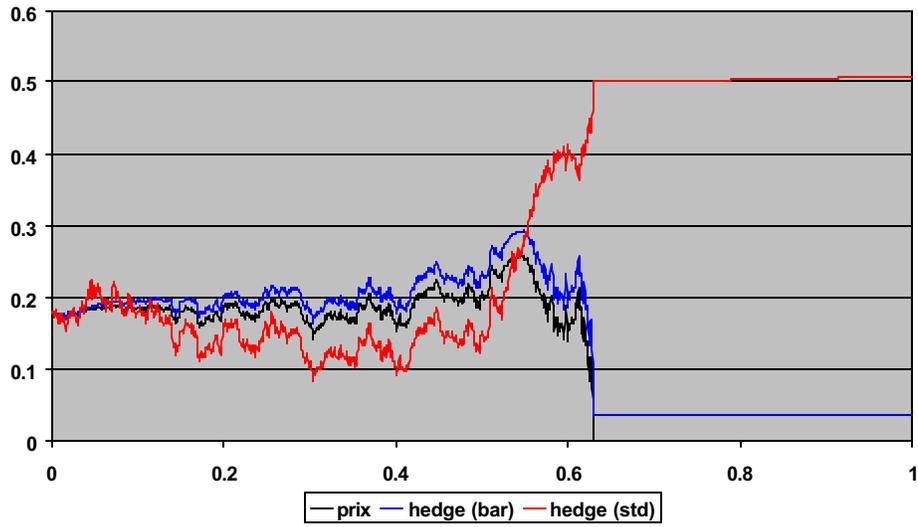


FIG. 7: Hedging : barrière 1 touchée

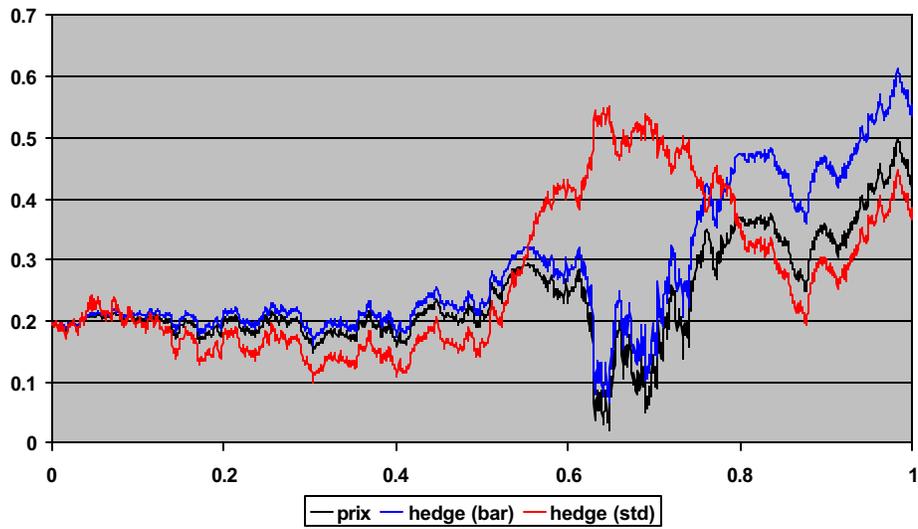


FIG. 8: Hedging : barrière 2 non touchée

Références

- [AL99] Thierry Ané and Vincent Lacoste. *Understanding Bid-Ask Spreads of Derivatives under Uncertain Volatility and Transaction Costs*, May 1999.
- [Hul00] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, fourth edition, 2000.
- [NEKS98] Monique JeanBlanc-Picqué Nicole El Karoui and Steven E. Shreve. Robustness of the black and scholes formula. *Mathematical Finance*, 8(2) :93–126, April 1998.
- [nri] *Numerical Recipes in C*.
- [Sul] Agès Sulem. *Finite Difference Methods for Option Pricing*.